

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI****15.02.2025****Clasa a XII-a****Subiectul I (7 puncte)**

Se consideră funcțiile $f, F : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin 7x}{\sin x}$ și $F(x) = x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{3} \sin 6x$.

Arătați că $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Supliment G.M. 9/2024

Subiectul II (7 puncte)

a) Arătați că $0 < \ln(1 + x) < x$, $\forall x > 0$.

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_n = \frac{1}{n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(1 + \cos x) dx$, pentru oricare $n \geq 1$, este convergent și determinați limita sa.

Subiectul III (7 puncte)

Fie (G, \bullet) un grup cu elementul neutru e .

a) Dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$, arătați că grupul este comutativ.

b) Dacă G este finit, comutativ și $x^2 = e$ pentru mai mult de jumătate din elementele lui G , arătați că $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

Subiectul IV (7 puncte)

Fie $(G, *)$ un grup și $H \subset G$ un subgrup propriu al său. Determinați funcția $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(e) = a \in G$, unde e este elementul neutru al lui G și

$$f(x * y) = x * f(y), \forall x, y \in G \setminus H.$$

Notă:

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.